آمـــوزشـــــی

دو مسئله ویژه از حرکت پرتابی

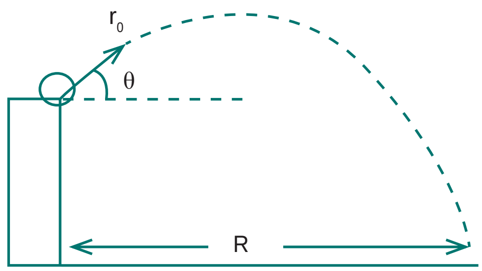
بهارک دماوندی
دبیر فیزیک دبیرستان‌های تهران

چکیده

از جمله حرکت‌ها با شتاب ثابت، حرکت ایده‌آل پرتابه‌ها در اثر نیروی گرانش در غیاب مقاومت هوا می‌باشـــد. مسائل متنوع بی‌شماری برای حرکت پرتابی قابل طرح است که بعضی از آن‌ها از فرط تکرار، در بایگانی حافظه ضبط شـــده‌اند. در این نوشتار، دو مثال جالب (و البته کمتر تکراری) مورد آنالیز دقیق واقع می‌شوند. مسئله اول «بیشـــینه برد پرتابه را هنگام پرتاب از فراز یک بلندی» بررسی می‌کند. انتظار داریم در حالت خاص، این مسئله به همان مسئلهٔ معروف، بیشینه برد پرتابه زمین‌ـ به‌ـ زمین، منتهی گردد. مسئله دوم، حالتی را می‌کاود، که در پرتاب زمین به زمین، «در کل مسیر حرکت، فاصله پرتابه تا مبدأ پرتاب در حال ازدیاد باشد.»

کلیدواژه‌ها: حرکت پرتابی، پرتابه، برد پرتابه، برد بیشینه

مسئله اول: در شکل زیر گلوله (در شرایطی که مقاومت هوا وجود ندارد) از ارتفاع ثابت h پرتاب می‌شود. زاویه پرتابی θ چقدر باشد تا برد افقی R بیشینه گردد؟



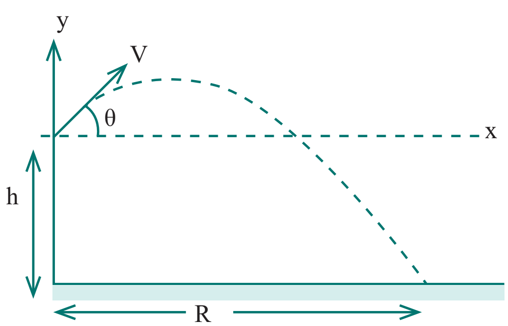
این مسئله یادآور مسئله معروف بیشینهٔ برد پرتابی در پرتاب زمین به زمین اســـت. در آن برد پرتابه به ازای θ=۴۵° بیشینه می‌شود و برای بیشینهٔ برد داریم:

$$R_\circ = \frac{v_\circ^{۲}}{g}$$

ولی مسئله حاضر با آن مسئله کمی تفاوت دارد. درواقع سؤال بالا درســـت طرح نشده اســـت. هنگام پرتاب از ارتفاع ثابت h، بیشینهٔ R، هم وابسته به $v_\circ$ و هم وابسته به θ است. درواقع سؤال درست چنین است:

۱. به ازای تندی اولیهٔ $v_\circ$، بیشینهٔ برد چقدر است؟
۲. این بیشینهٔ برد به ازای چه زاویهٔ θ رخ می‌دهد؟

در شـــکل زیر مبدأ مختصات را همان نقطهٔ پرتاب گرفته‌ایم. معادلات حرکت عبارتند از:



$$y = --gt \quad + (v \sin\theta)t = -h$$

$$R = (v \cos\theta)t \rightarrow t = \frac{\qquad}{v \;\; \cos}$$

با قرار دادن مقدار t در معادلهٔ y، داریم:

$$-\frac{۱}{۲}g\left(\frac{R^{۲}}{v_\circ^{۲}\cos^{۲}\theta}\right) + (v_\circ \sin\theta)\frac{R}{v_\circ \cos\theta} + h = \circ$$

پس از کمی ساده‌سازی خواهیم داشت:

$$\boxed{h(1+\cos 2\theta) = \frac{gR^2}{v_0^2} - R\sin 2\theta} \qquad \text{(رابطهٔ ۱)}$$

در معادلهٔ بالا، h و v_0 ثابت هســـتند. می‌خواهیم مقداری از θ را پیدا کنیم که به ازای آن R بیشـــینه گردد. بدین منظور لازم است که:

$$\frac{dR}{d\theta} = 0$$

$$-2h\sin 2\theta = \frac{g}{v_0^2}\left(2R\frac{dR}{d\theta}\right) - \sin 2\theta\frac{dR}{d\theta} - 2R\cos 2\theta$$

از طرفین رابطه (۱) نسبت به θ مشتق می‌گیریم:

با فرض $\frac{dR}{d\theta} = 0$ داریم:

$$-2h\sin 2\theta = -2R\cos 2\theta \rightarrow \tan 2\theta = \frac{R_{max}}{h}$$

$$\boxed{\theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{R_{max}}{h}\right)} \qquad \text{(رابطهٔ ۲)}$$

در رابطهٔ بالا، منظور از R_{max} بیشینهٔ «برد پرتابه به ازای تندی اولیه» v_0 است.

حال باید R_{max} را حساب کنیم.

از روابط مثلثاتی زیر، $\sin 2\theta$ و $\cos 2\theta$ را حساب می‌کنیم و در رابطهٔ (۱) قرار می‌دهیم:

$$\cos 2\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{R^2}{h^2}}} = \frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}}$$

$$\sin 2\theta = \frac{\tan 2\theta}{\sqrt{1+\tan^2 2\theta}} = \frac{\frac{R}{h}}{\sqrt{1+\frac{R^2}{h^2}}} = \frac{R}{\sqrt{R^2+h^2}}$$

پس از ساده‌سازی در رابطهٔ (۱) خواهیم داشت:

$$\boxed{R_{max} = \sqrt{\frac{2v_0^2}{g}\left(h+\frac{v_0^2}{2g}\right)}} \qquad \text{(رابطهٔ ۳)}$$

توجه در حالت خاص h=0 (پرتاب زمین به زمین) داریم:

$$\theta = \frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}\ \text{rad}$$

$$R_{max} = \sqrt{\frac{2v_0^2}{g}\times\frac{v_0^2}{2g}} = \frac{v_0^2}{g}$$

و این‌ها همان نتایج آشنای قبلی است.

توجه اگر پرتاب از ارتفاع خیلی زیاد صورت گیرد، داریم:

$$R_{max} = \sqrt{\frac{2v_0^2}{g}\times h} \rightarrow R_{max} \propto \sqrt{h}$$

$$\theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{R_{max}}{h}\right) = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{\sqrt{\frac{2v_0^2}{g}\times h}}{h}$$

$$\theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\sqrt{\frac{2v_0^2}{gh}}$$

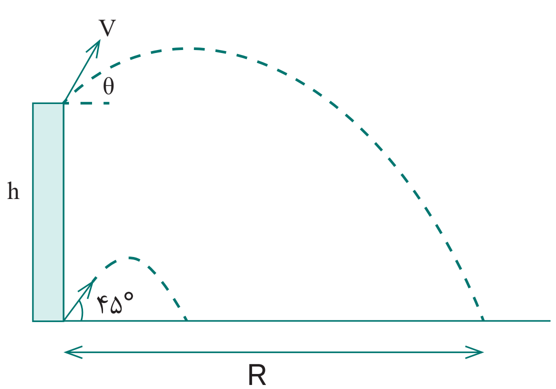
وقتی h خیلی زیاد شـــود، θ عملاً به سوی صفر میل می‌کند. پس در پرتاب گلوله‌ها از فراز برج‌های خیلی مرتفع، بیشینهٔ برد افقی در زاویهٔ صفر (پرتـــاب افقی) رخ می‌دهد و به ازای تندی اولیهٔ ثابت، بیشـــینهٔ برد با «جذر ارتفاع» نقطه پرتاب متناسب است.

دقت کنید؛ اگر بیشـــنه برد زمین به زمین را با $R_0 = \frac{v_0^2}{g}$ نمایش دهیم، آنگاه بیشینهٔ برد و زاویه متناظر با آن در هنگام پرتاب از فراز ساختمان‌های خیلی مرتفع، عبارت‌اند از:

$$R_{max} \simeq \sqrt{2R_0 h}$$

$$\theta \simeq \frac{1}{2}\tan^{-1}\sqrt{\frac{2R_0}{h}}$$

مثال: به ازای تندی اولیهٔ یکســـان، بیشینهٔ جابه‌جایی افقی گلولهٔ پرتابی از فراز برجی به ارتفاع h، ده برابر بیشینهٔ برد افقی پرتاب زمین‌به‌زمین است. ارتفاع ساختمان و زاویه پرتاب θ چقدر است؟



حل: از تقریب قبل، هنگام پرتاب از فراز ساختمان‌های خیلی بلند استفاده می‌کنیم:

$$R_{max} = \sqrt{2R_0 h} = 10R_0 \rightarrow 2R_0 h = 100R_0^2 \rightarrow h = 50R_0$$

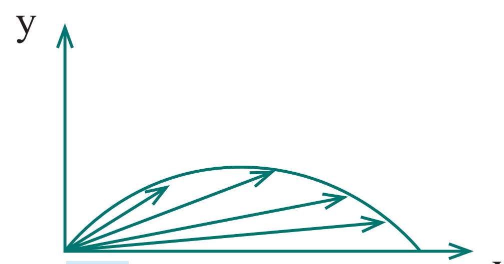
$$\theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\sqrt{\frac{2R_0}{h}} = \frac{1}{2}\tan^{-1}\sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) \simeq 5.6^\circ$$

در پرتاب گلوله‌ها از فراز برج‌های خیلی مرتفع، بیشینهٔ برد افقی در زاویهٔ صفر (پرتاب افقی) رخ می‌دهد و به ازای تندی اولیهٔ ثابت، بیشینهٔ برد با «جذر ارتفاع» نقطه پرتاب متناسب است

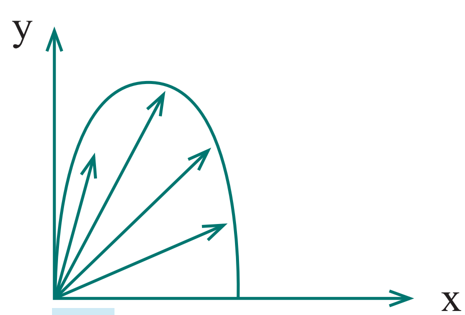
پیداست که زاویهٔ پرتاب خیلی کم و عملاً مشابه پرتاب افقی است.

مســـئله دوم: در پرتاب زمین به زمین، حداکثر زاویهٔ پرتاب چقدر باشد تا در کل مسیر حرکت، پرتابه در حال دور شدن از مبدأ پرتاب باشد؟

به دو نمودار زیر توجه کنید! در شکل (۱) بزرگی بردار مکان پرتابه (که از مبدأ مختصات رسم می‌شود) همواره در حال افزایش است. در شـــکل (۲) بزرگی بردار مکان ابتدا افزایشی و سپس کاهشی می‌شود. به‌طور مشهودی پیداست که این وضعیت اخیر به ازای زوایای پرتاب نسبتاً زیاد رخ می‌دهد. می‌خواهیم بررسی کنیم که از چه زاویهٔ پرتاب وضعیت شکل (۱) و از چه زاویه‌ای بزرگ‌تر، وضعیت شکل (۲) حاکم می‌شود.



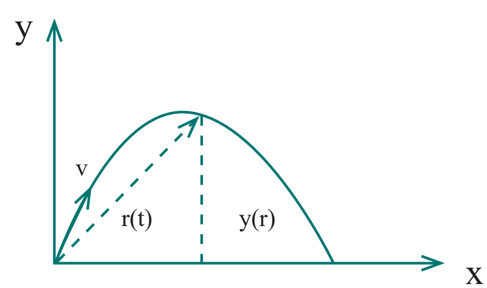
شکل۱



شکل۲

به شـــکل زیر توجه کنید! بردار مکان پرتابه در هر لحظه بر حسب مؤلفه‌های افقی و عمودی نمایش داده شده است:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$$



$$\begin{cases} x(t) = (v_0 \cos\theta)t \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\theta)t \end{cases} \rightarrow \left|\vec{r}(t)\right|^2 = x^2(t) + y^2(t)$$

برای آنکه تابع $\left|\vec{r}(t)\right|$ به‌طور دائمی افزایشی باشد، لازم است به ازای هر t داشته باشیم: $\frac{d\left|\vec{r}(t)\right|}{dt} > 0$ به‌طور معادل و ساده‌تر می‌توان این شرط را به روی تابع $f(t) = \left|\vec{r}(t)\right|^2$ اعمال کرد:

$$f(t) = x^2(t) + y^2(t) = (v_0^2 \cos^2\theta)t^2 + \left[-\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\theta)t\right]^2$$

$$\frac{df(t)}{dt} = (2v_0^2 \cos^2\theta)t + 2\left[-\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\theta)t\right](-gt + v_0 \sin\theta)$$

$$\frac{df}{dt} = 0 \Rightarrow v_0^2 \cos^2\theta + \frac{1}{2}g^2t^2 - \frac{1}{2}gtv_0 \sin\theta$$

$$-gtv_0 \sin\theta + v_0^2 \sin^2\theta = 0$$

$$\frac{1}{2}g^2t^2(\frac{3}{2}gv_0 \sin\theta)t + v_0^2 = 0$$

برای آنکه $\frac{df}{dt}$ همواره مثبت باشد، لازم است که معادلهٔ درجه دوم قبل، فاقد ریشه باشد:

$$\Delta < 0 \rightarrow (\frac{3}{2}gv_0 \sin\theta)^2 - 4(\frac{1}{2}g^2)v_0^2 < 0$$

$$\frac{9}{4}\sin^2\theta < 2$$

$$\sin^2\theta < \frac{8}{9} \rightarrow \sin\theta < \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\boxed{\theta < \sin^{-1}\frac{2\sqrt{2}}{3} \simeq 70/5^\circ}$$

تا زاویه پرتاب ۷۰/۵° ، در پرتاب زمین‌به‌زمین بیشینهٔ فاصلهٔ پرتابه تا مبدأ پرتاب، برابر برد پرتابه است

این نتیجه نشـــان می‌دهد کـــه از زوایای پرتاب کم تا زاویه پرتاب نســـبتاً زیاد ۷۰/۵° بزرگی بـــردار مکان پرتابه همواره افزایشـــی اســـت و درواقع در محدودهٔ این زوایا، پرتابه حین حرکت همواره از مبدأ پرتاب در حال دور شـــدن است. از این زاویهٔ پرتاب بیشـــتر، وضعیت مسیر متفاوت خواهد شد و به شکل (۲) در ابتدای متن در می‌آید: یعنی پرتابه ابتدا از مبدأ دور شـــده و سپس به مبدأ نزدیک خواهد شد. درواقع نتیجهٔ قبل را می‌توان با عبارت دیگری هم بیان کرد: «تا زاویه پرتاب ۷۰/۵° ، در پرتاب زمین‌به‌زمین بیشینهٔ فاصلهٔ پرتابه تا مبدأ پرتاب، برابر برد پرتابه است.»